



TITLE:

# Martingaleの $L^p$ -normに関する Gilatの評価について(Martingaleに 関連する諸問題)

AUTHOR(S):

菊池, 万里

---

CITATION:

菊池, 万里. Martingaleの $L^p$ -normに関するGilatの評価について  
(Martingaleに関連する諸問題). 数理解析研究所講究録 1989, 706: 124-  
127

ISSUE DATE:

1989-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101612>

RIGHT:

# Martingaleの $L^p$ -normに関する

## Gilatの評価について

富山大 理 菊池 万里 (Masato kikuchi)

D. Gilat [5] によれば、一様可積分な martingale  $X = (X_t)$  の  $H^1$ -norm と  $L^p$ -norm の間に、つぎの不等式が成り立つ。

$$\|X^*\|_1 \leq \Gamma(q+1)^{1/q} \|X_-\|_p \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

実は、定数  $\Gamma(q+1)^{1/q}$  は best possible な値である。 $E[X_- \log^+ X_-] < \infty$  ならば  $X \in H^1$  であり、逆は成立しないことを思い起こせば上の不等式は納得しやすい。この不等式を導く際に用いられる Blackwell-Dubins の分布不等式は、 $X^* = \sup_s |X_s|$  の分布を直接に評価するもので、他の martingale 不等式を考察する際にも大変有効である。

先ず記号を定義する。 $\mathbb{R}$  上の確率法則  $\mu$  に対し、区間  $]0, 1[$  上で定義された減少関数で (Lebesgue 測度に関する) 分布が  $\mu$  となるものを  $f_\mu$  と書く。このような  $f_\mu$  はすべての  $\mu$  に対して本質的に一意に定まる。 $(f_\mu = \inf \{s \in \mathbb{R} : \mu(]-\infty, s]) > 1-t\})$  また、 $f_\mu^*$  をつぎのように定義する。

$$f_\mu^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_\mu(s) ds$$

$f_\mu$  は減少であることに注意すれば  $f_\mu^*$  はその最大関数であることがわかる。

### 定理 1 (Blackwell-Dubins [2])

$X = (X_t)$  を一様可積分な martingale とする。 $X_-$ ,  $|X_-|$  の分布をそれぞれ  $\mu$ ,  $\nu$

とする。このとき、

$$(1) \quad P \{ \sup_t X_t > \lambda \} \leq m \{ s \in ]0, 1[ : f_\mu(s) > \lambda \} \quad \text{for every } \lambda > 0$$

$$(2) \quad P \{ \sup_t |X_t| > \lambda \} \leq m \{ s \in ]0, 1[ : f_\nu(s) > \lambda \} \quad \text{for every } \lambda > 0$$

ここに  $m$  は  $]0, 1[$  上の Lebesgue 測度である。

## 定理 2 (Dubins-Gilat [3])

有限な平均を持つ distribution  $\mu$  に対し、ある確率空間  $(\Omega, F, P)$  上に  $X_\infty \stackrel{d}{=} f_\mu$ ,  $\sup_t X_t \stackrel{d}{=} f_\mu^*$  なる一様可積分な martingale  $X = (X_t)$  が存在する。

定理 1 の証明はつぎの事実を使うと簡単である。

補題 : 区間  $]0, 1[$  上の  $0 \leq \phi \leq 1$  なる可測関数  $\phi$  と減少関数  $f$  に対し

$$\int_0^1 f(t) \phi(t) dt \leq \int_0^a f(t) dt \quad \text{where} \quad a = \int_0^1 \phi(t) dt$$

(定理 1 の証明) (1)、(2)とも同様であるから (1)のみ示す。先ず  $A \in F$  に対し  $\mathbb{R}$  上の可測関数  $\phi(x)$  を  $\phi(X_\infty) = P(A | X_\infty)$  となるようにとる。

$$E[X_\infty : A] = E[X_\infty \phi(X_\infty)] = \int_0^1 f_\mu(t) \phi(f_\mu(t)) dt \leq \int_0^{P(A)} f_\mu(t) dt$$

ここで最後の不等式は補題と  $\phi \circ f_\mu$  の  $]0, 1[$  上での積分が  $P(A)$  であることによる。特に

$A = \{\sup_t X_t > \lambda\}$  とすれば、Doob の不等式と上の不等式より

$$\lambda P(A) \leq \int_0^{P(A)} f_\mu(t) dt \quad \therefore \quad \lambda \leq f_\mu^*(P(A))$$

従って  $P(A) \leq \sup \{t \in ]0, 1[ : f_\mu^*(t) > \lambda\} = m \{t \in ]0, 1[ : f_\mu^*(t) > \lambda\}$  □

定理2の性質をみたすmartingaleは Duins-Gilat の他にも Azema-Yor [1]によって構成されている。それはBrown運動を適当にstopして得られるもので大変興味深いが、細かい計算を必要とするので、ここではDubins-Gilatの例をあげておく：

$\Omega = ]0, 1[$  ,  $F_t = \sigma(B(]0, t[), [t, 1[))$  ,  $P = \text{the Lebesgue measure on } \Omega$  とし、

$$X_t(\omega) = f_\mu(1-\omega) I_{]0, t[}^*(\omega) + f_\mu^*(1-t) I_{[t, 1[}(\omega)$$

とおけばよい。

Duins-GilatはDoobの不等式  $\|X^*\|_p \leq q \|X_\infty\|_p$  の定数  $q$  が最良であることを示すために定理2を用いた。実際、区間  $]0, 1[$  上で  $f(t) = t^{-1/p}$  とし  $X_\infty \simeq f$  ,  $\sup_t X_t \simeq f$  となるmartingale  $X = (X_t)$  をとれば、( $X$ :non-negative に注意して)

$$\|X^*\|_p \leq q \|X_\infty\|_p, \quad p' < p$$

であることがわかる。

つぎに、この報告の最初にあげた不等式と  $L \log^+ L$  タイプのDoobの不等式への応用をあげておこう。

定理3 (D. Gilat [5])

任意のmartingale  $X = (X_t)$  に対し、つぎが成立：

$$(3) \quad \|X^*\|_1 \leq \Gamma(q+1)^{1/q} \|X_\infty\|_p \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

定数  $\Gamma(q+1)^{1/p}$  は最良である。

これはつぎの不等式の言い換えである： $f$  を減少関数とすると

$$\int_0^1 f^*(t) dt = \int_0^1 f(t) \log t^{-1} dt \leq \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_0^1 \log t^{-q} dt \right)^{1/q} = \Gamma(q+1)^{1/q} \|f\|_p$$

この不等式は  $g(t) = C(\log t^{-q})$  のときに限り等号が成立する。したがって  $X_\infty \simeq g$  ,  $\sup_t X_t \simeq g^*$  となる(positive) martingale  $X = (X_t)$  にたいして(3)は等式になる。

定理 4 (D. Gilat [4])

$c_0$  をつぎの方程式の根とする。  $e^{-c_0} = (c_0 - 1)^2$  :  $c_0 \approx 1.487 < 1.582 \approx e/(e-1)$

$$E[X^*] \leq c_0 (1 + E[|X_-| \log^+ |X_-|])$$

がすべての  $X = (X_t)$  に対して成立し、等号の成り立つような martingale も存在する。

証明には

$$\int_0^1 f^*(t) dt \leq c_0 \left( 1 + \int_0^1 |f(t)| \log^+ |f(t)| dt \right)$$

を示せばよいが、これも初等的な計算である。等号を与える関数は  $g(t) = e^{-1/c_0} \vee 1$  である。

#### 参 考 文 献

- [1] J. Azéma et M. Yor, Une solution simple au problème de Skorokhod, Séminaire de Prob. XIII, Lecture Notes in Math. 721, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1978), 90-115
- [2] D. Blackwell and L. E. Dubins, A converse to the dominated convergence theorem, Illinois J. Math. 7 (1963), 508-514
- [3] L. E. Dubins and D. Gilat, On the distribution of maxima of martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 337-338
- [4] D. Gilat, The best bound in the  $L \log L$  inequality of Hardy & Littlewood and its martingale counterpart, Proc. Amer. Math. 97 (1986), 429-436
- [5] D. Gilat, On the ratio of the expected maximum of a martingale and the  $L_p$ -norm of its last term. Israel J. Math. 63 (1988) 270-280